Cuadernos de Economía. Vol. 22 399-414 1994.

El método generalizado de los momentos. Un SURVEY

Jorge V. Pérez Rodríguez

Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española.
Universidad de Barcelona.

Resumen

Este artículo pretende realizar una síntesis de un método de estimación desarrollado por Hansen (1982), denominado Método Generalizado de los Momentos (MGM), el cual es útil en aquellos modelos definidos sobre economías dinámicas, cuya solución de equilibrio está representada por ecuaciones de Euler. Las estimaciones de los parámetros se obtienen minimizando la función criterio de las variables instrumentales. Una vez estimado los parámetros del modelo, este método permite construir un contraste basado en la función criterio que nos ayuda a valorar si el modelo económico planteado es aceptable empíricamente.

Abstract

The aim of this paper is present a sinopsis of a particular estimation method development by Hansen (1982), and called Generalized Moments Method (GMM), that is utilized into dynamic economic models which equilibrium solution is a Euler's equation. Parameter estimations are obtained minimizing a criterium function of instrumental variables. Once the parameters of the model has been estimated, this method allows to constructing a test based in this function that would be able assets if the economic model is rejected empirically.

1. INTRODUCCIÓN

En este papel introducimos al lector interesado en una síntesis y descripción de un método de estimación particularmente aceptable en el estudio de las implicaciones que existen en muchos datos de naturaleza económica, y que están presentes en una clase de modelos definidos sobre economías dinámicas. Estos modelos difieren entre sí con respecto a la heterogeneidad de las preferencias de los consumidores, del tiempo que caracteriza la negociación de los activos, y del papel del dinero en la adquisión de los bienes de consumo. A pesar de estas diferencias, una característica común de los mismos es que los precios futuros de los activos negociados pueden representarse como una expectativa condicionada (sobre la información existente) del producto de los rendimientos y de una interpretación apropiada de la tasa marginal de sustitución intertemporal del consumo. A estas conclusiones han llegado diversos autores como Rubinstein (1976), Lucas (1978), Breeden (1979), Hansen y Singleton (1982), Sargent (1987), Epstein y Zin (1989), entre otros.

La representación formal obtenida es una generalización del concepto de Fisher en el que si los mercados crediticios son perfectos y están en equilibrio, todos los activos han de venderse a su valor actual descontado. En estas circunstancias, el consumidor se muestra completamente indiferente entre los tipos de activos que posee, independientemente de cuáles sean sus preferencias temporales respecto al consumo. En otras palabras, en una situación de equilibrio en el mercado de activos, la inversión en cualquier activo produce una tasa de rendimiento igual al tipo de interés de mercado. Desde este punto de vista, el precio de cualquier activo sería igual a la tasa marginal de sustitución en el equilibrio. La aplicación de este principio a los modelos de valoración de precios exige que los activos sean vistos como bienes numerarios.

Pues bien, una vez se define el modelo económico y obtiene la solución que es una ecuación de expectativa condicionada, el método propuesto por Hansen (1982) y Hansen y Singleton (1982) nos permite estimar y contrastar esta clase particular de modelos econométricos, diseñados en entornos de expectativas racionales donde la relación entre las variables es no lineal, a través de las ecuaciones estocásticas de Euler.

Estas son condiciones de ortogonalidad poblacionales que están implícitas en el modelo económico. No es necesario resolver explícitamente el equilibrio estocástico para la estimación de los parámetros de la función objetivo dinámica que está definida para un agente representativo de la economía. Este método recibe el nombre de Método Generalizado de los Momentos (MGM). La esencia de este método de estimación es la función criterio de las variables instrumentales generalizadas (Hansen (1982)). Esta función criterio obtiene estimadores consistentes de los parámetros.

El estadístico obtenido está basado en el valor mínimo obtenido de la función criterio, y éste permite, además, contrastar si existe una combinación lineal verdadera de las condiciones de ortogonalidad que se utilizan en la estimación del modelo bajo la hipótesis nula son cero.

La utilización de este tipo de metodología se realiza para contrastar las preferencias de los agentes. Por ejemplo, en modelos donde se estudian preferencias alternativas (Singleton (1985)), del impacto sobre las preferencias de la aversión al riesgo relativa supuesta constante y de la no separabilidad del consumo agregado: de bienes duraderos y no duraderos (Dunn y Singleton (1986)), de los bienes privados y públicos en la valoración de la estructura temporal de los tipos de interés (Pérez-Rodríguez (1994)); en modelos donde se analiza la sustitución intertemporal del consumo bajo preferencias isoelásticas (Restoy (1992)), y en la influencia de los cambios demográficos sobre los mercados de capital (Bakshi y Chen (1994)), entre otros.

En general, el Método Generalizado de los Momentos es utilizado para realizar la estimación de un conjunto de condiciones de ortogonalidad, las cuales están compuestas por los productos cruzados de las ecuaciones y de los instrumentos.

2. La condición de primer orden. La ecuación de Euler

La idea básica de la estimación MGM se basa en un conjunto de ecuaciones de Euler que deben satisfacerse en equilibrio, y que se obtienen de un problema de optimización dinámica. Estas son condiciones de ortogonalidad poblacionales que dependen de la forma no lineal que adoptan las variables (las cuales son observables), de los parámetros desconocidos que caracterizan las preferencias y demás condiciones que determinan la conducta del agente económico.

Una aproximación para estimar y contrastar los modelos de valoración de precios es el Método Generalizado de los Momentos (MGM) desarrollado por Hansen (1982). Para su utilización debe definirse previamente el conjunto de condiciones de ortogonalidad que identifican los parámetros del modelo. Si existen más condiciones de ortogonalidad que parámetros, el modelo está sobreidentificado, y puede contrastarse a través del método propuesto por Hansen (1982).

La solución de equilibrio habitual en el problema de optimización, que caracteriza a un modelo de valoración de precios en tiempo discreto, está definida por las siguientes condiciones de primer orden, las cuales tienen la forma

$$E_t h(x_{t+n}, \theta_0) = 0 \tag{1}$$

donde, x_{t+n} es un vector **l** dimensional de variables observadas por los agentes y los económetras en el periodo t+n; θ_0 es un vector **k** dimensional de parámetros desconocidos por los económetras; **h** es una función de posicionamiento (*mapping function*) $R^l \times R^k$ dentro de R^m, donde **m** representa el número de activos en posesión del inversor; y, $\mathbf{E}_t$ es el operador de expectativas condicionadas a la información existente en el conjunto de información $\mathbf{\Omega}_t$.

A través de la presentación formal de un modelo teórico se construye un estimador de los parámetros desconocidos basado en las variables instrumentales, cuyas características para la estimación son: primero, el procedimiento propuesto no requiere de una representación explícita y completa del entorno económico; segundo, no requiere establecer, *a priori*, condiciones excesivamente fuertes sobre la naturaleza de las variables; tercero, la estimación e inferencia puede realizarse cuando únicamente un subconjunto de dicho entorno económico está especificado *a priori*; cuarto, son estimadores consistentes y tienen distribución límite normal bajo supuestos no excesivamente restrictivos; quinto, el procedimiento puede ser utilizado cuando existan más condiciones de ortogonalidad que parámetros a estimar, es decir, que el modelo esté sobreidentificado; sexto, tiene la ventaja de la simplicidad computacional; y, séptimo, también es utilizable, cuando los términos de perturbación son condicionalmente heterocedásticos y serialmente correlacionados.

3. El estimador de Hansen

La estimación del vector θ_0 se realiza usando la función criterio de las variables instrumentales generalizadas (Hansen (1982)). La idea que subyace en el procedimiento de estimación propuesto es generar una familia de condiciones de ortogonalidad a partir del modelo económico planteado. Estas condiciones de ortogonalidad se utilizan para construir una función criterio cuyo mínimo es la estimación de θ_0.

Esta función criterio se construye de tal manera que permite obtener estimadores consistentes y asintóticamente normales. El estadístico obtenido, que está basado en el valor minimizado de la función criterio, contrasta si una combinación lineal verdadera de las condiciones de ortogonalidad utilizadas en la estimación del modelo bajo la hipótesis nula son cero.

Definiendo a u_{t+n} como el vector de términos de perturbación en el modelo que pretende estimarse,

$$u_{t+n} = h(x_{t+n}, \theta_0) \Rightarrow E_t[u_{t+n}] = E_t[h(x_{t+n}, \theta_0)] = 0 \qquad (2)$$

donde $E_t[h(x_{t+n}, \theta_0)] = 0$ no excluye la posibilidad de existencia de autocorrelación serial en **u**[1], dado que x_{t+j-1} no está necesariamente incluido en $\mathbf{\Omega}_t$, cuando j>1.

3.1. El estimador MGM de θ

Considerando la ecuación (2) suponemos que: 1.- los **m** valores de u_{t+n} tienen momentos de segundo orden finitos con respecto a la media. 2.- z_t es un vector **q** dimensional de variables instrumentales que es observable por los económetras y que posee momentos de segundo orden finitos. Entonces, podemos definir la función **f** según,

$$f(x_{t+n}, z_t, \theta_0) = h(x_{t+n}, \theta_0) \otimes z_t \qquad (3)$$

donde: **f** es una función de posicionamiento definida en R^l x R^q x R^k dentro de R^r, siendo **r** igual al producto de **m** por **q**, **r = mq**; ⊗ es el producto de Kronecker; **q** es el número de variables instrumentales con momentos de segundo orden finitos.

Revisando la ecuación que expresa la condición de ortogonalidad e introduciendo los supuestos adicionales, tenemos que la condición de ortogonalidad poblacional está dada por,

$$E[f(x_{t+n}, z_t, \theta_0)] = E[z_t\ u_t(\theta_0)] = 0 \qquad (4)$$

donde, E es el operador de expectativas no condicionadas. La ecuación (4) representa un conjunto de **r** condiciones de ortogonalidad poblacionales, que nos permite construir un estimador de θ_0, **r** es como mínimo igual al número de parámetros desconocidos, **k**, es decir, **r≥k**.

Una vez especificada la condición de ortogonalidad poblacional incluyendo el vector de instrumentos z_t, el estimador por el método de los momentos para θ_0 está definido

1. Hansen y Singleton (1982) argumentan que ante la presencia de correlación serial en **u**, la matriz de covarianzas asintóticas se hace más compleja, aunque este hecho no afecta a la consistencia.

sobre la función $g_0(\theta) = E[f(x_{t+n}, z_t, \theta)]$, con $g_0(\theta_0) = 0$, considerando a toda la información muestral disponible $\{(x_{1+n}, z_1), ..., (x_{T+n}, z_T)\}$ y a los parámetros desconocidos θ, $\theta \in R^k$. En términos muestrales si el modelo está correctamente especificado el estimador MGM de $g_0(\theta)$ puede aproximarse por

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f(x_{t+n}, z_t, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} z_t u_t(\theta) \tag{5}$$

para el tamaño muestral T, y evaluada en $\theta = \theta_0$. Este es el vector de las condiciones de ortogonalidad muestrales[2]. $g_T(\theta_0)$ se aproximaría a cero para valores elevados de T.

De esta forma, el estimador MGM de θ_0 es $\theta_T \in \Theta$. Según Hansen (1982) éste se obtiene eligiendo el mínimo de la función criterio, J_T, que está definida por

$$J_T(\theta) = g_T(\theta)' \, W_T g_T(\theta) \tag{6}$$

donde, W_T es una matriz de pesos definida positiva y simétrica de orden **rxr** que depende de la información muestral.

La elección correcta de la matriz de pesos es fundamental, pues permite que las estimaciones sean consistentes. Los teoremas (3.1) y (3.2) de Hansen (1982) muestran que la elección de W_T puede realizarse de forma óptima construyendo un estimador que posea la covarianza asintótica más pequeña del estimador de θ_T, es decir, W_0. Así,

$$W_0 = (S_0)^{-1} = \left[\sum_{j=-n+1}^{n-1} E\left[f(x_{t+n}, z_t, \theta_0) \, f(x_{t+n-j}, z_{t-j}, \theta_0)' \right] \right]^{-1} \tag{7}$$

donde la matriz S_0 está definida por

$$S_0 = \sum_{j=-n+1}^{n-1} E\left[f(x_{t+n}, z_t, \theta_0) \, f(x_{t+n-j}, z_{t-j}, \theta_0)' \right] = \sum_{j=-n+1}^{n-1} E\left[z_t u_t(\theta_0) u'_{t-j}(\theta_0) z'_{t-j} \right]$$

2. Dado que (3) tiene un cero en $\theta = \theta_0$ y f es una función continua en sus tres argumentos puede estimarse θ_0 a través de θ_T, que pertenece al espacio de parámetros $\theta \subseteq \Theta$, el cual hace que (5) se aproxime a cero, también.

entonces, su estimador consistente está definido por S_T. Además, **n** es el número de autocovarianzas poblacionales en el término de perturbación u_t.

3.2. La matriz de varianzas y covarianzas asintótica de los estimadores

La matriz de covarianzas asintóticas de los estimadores de variables instrumentales generalizadas depende de la elección óptima de la matriz de pesos W_T. La expresión de la matriz de covarianzas asintóticas de los estimadores es

$$\Sigma = (D'_0 W_0 D_0)^{-1} \tag{8}$$

donde Σ tiene rango completo. En este caso, D_0 es igual a

$$D_0 = E\left[\frac{\partial h}{\partial \theta}(x_{t+n}, \theta_0) \otimes z_t\right] \tag{9}$$

suponiendo que **h** es diferenciable, y que el vector de instrumentos, z_t, se elige de tal forma que la matriz D_0 posee rango completo. Esta expresión es el resultado del producto de kronecker entre las primeras derivadas con respecto al vector de parámetros, y el vector de instrumentos.

La matriz de pesos W_T converge casi seguramente a una matriz constante y límite W_0 de rango completo, es decir,

$$plim\,(\hat{W}_T - W_T) = 0$$

D_0 y W_0 pueden estimarse consistentemente utilizando las siguientes expresiones muestrales:

$$D_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial h}{\partial \theta}(x_{t+n}, \theta_T) \otimes z_t$$

$$\Omega_T(j) = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T} f(x_{t+n}, z_t, \theta_T)\, f(x_{t+n-j}, z_{t-j}, \theta_T)' = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{h}_t\hat{h}_{t-j}$$

$$S_T = \Omega_T(0) + \sum_{j=1}^{m} [\Omega_T(j) + \Omega_T(j)']$$

$$W_T = (S_T)\text{-}1 = \left[\Omega_T(0) + \sum_{j=1}^{n-1} [\Omega_T(j) + \Omega_T(j)']\right]^{-1}$$

3.3. El procedimiento de estimación

Para minimizar la función criterio $J_T(\theta)$ se requiere un estimador consistente de la matriz $(S_0)^{-1}$. Dado que el estimador θ_T de θ_0 se necesita para obtener W_T, entonces el procedimiento de estimación óptimo requiere de dos pasos:

1. Se utiliza una elección subóptima de W_T para minimizar el valor de $J_T(\theta)$ que nos permitirá obtener θ_T. La matriz identidad es sustituida por $(S_T)^{-1}$ en la función criterio para obtener los valores inciales de los parámetros. Estas estimaciones son usadas para construir las estimaciones de las perturbaciones.
2. Una vez obtenido θ_T se vuelve a calcular W_T, que nos servirá para conseguir un nuevo valor mínimo de la función objetivo, $J_T(\theta)$, que a su vez será de utilidad para obtener un nuevo θ_T. La función criterio con las estimaciones resultantes de la matriz de pesos, $(S_T)^{-1}$, se minimiza para lograr las estimaciones óptimas de los parámetros.

Una observación importante es que en la matriz de varianzas y covarianzas, $E_t[u_{t+n}\ u'_{t+n}]$, se pueden permitir grados de condicionalidad heterocedástica y autocorrelación serial. Así, en los modelos de valoración de precios, esta característica permite que las covarianzas condicionadas del rendimiento de los activos fluctúen con los movimientos de las variables.

En el ámbito de aplicación del MGM, la estimación de Hansen (1982) coincide con la obtenible mediante la aplicación de los estimadores por Mínimos Cuadrados en Tres Etapas (MC3E), cuando los errores son serialmente independientes y, además, se utilizan los mismos instrumentos para cada ecuación. De esta forma, las condiciones iniciales de las estimación se obtienen aplicando los Mínimos Cuadrados en Tres Etapas (MC3E).

En la notación de Hansen, el estimador MGM se determina a través de las condiciones de ortogonalidad $u_t[x_{t+n},b] \otimes z_t$ tan próximo a cero como sea posible usando la varianza estimada de este vector. El estimador MC3E es consistente y asintóticamente eficiente[3].

3.4. Propiedades del estimador MGM

Las propiedades de este estimador son, en cierto sentido, débiles. Este hecho, quizás está relacionado con la elección óptima de z_t. Sin embargo, θ_T es un estimador consistente y asintóticamente normal (Hansen (1982)). La consistencia y normalidad asintótica de los estimadores MGM se establecen bajo el supuesto de que las variables observadas sean estacionarias y ergódicas.

La distribución asintótica del estimador MGM se obtiene bajo ciertas condiciones de regularidad especificadas en Hansen (1982). En este sentido, si una secuencia aleatoria de matrices $\{W_T\}$ converge casi seguramente a una constante **r** dimensional que es la matriz simétrica no singular, W_0, el estimador MGM de θ_T es consistente, y, a través del lema (4.1), donde se especifican los resultados asintóticos deseados, se supone que

$$\sqrt{T}\,(\hat{\theta}_T - \theta_0) \rightarrow N\,(0,(D'_0\,W_0\,D_0)^{-1})$$

cuya diferencia o sesgo converge en distribución hacia una normal con media cero y varianza $(D'_0\,W_0\,D_0)^{-1}$.

Además, el estimador MGM no necesita definir explícitamente el tipo de heterocedasticidad que poseen los errores, permitiendo diversos grados de condicionalidad en los términos de perturbación, así como, tampoco necesita explicitar el tipo de autocorrelación serial en las perturbaciones. Sin embargo, no se asegura que el incumplimiento de estas hipótesis básicas del modelo de regresión permitan que los estimadores sean robustos, es decir, invariantes ante la existencia de tales errores.

Para solucionar este problema, Newey y West (1987) obtienen la matriz de covarianzas de los estimadores que es robusta y consistente a pesar de la existencia de autocorrelación serial y heterocedasticidad.

3. Una ampliación de los resultados alcanzados por este tipo de estimadores en los modelos de expectativas racionales se puede estudiar en Cumby, Huizinga y Obtsfeld (1983) quienes obtienen estimadores MC2E asintóticamente eficientes, aún ante la existencia de residuos autocorrelacionados e instrumentos que no son estrictamente exógenos. Los instrumentos serán fuertemente exógenos cuando se utilicen todos para todas las ecuaciones.

4. La estimación robusta de la matriz de varianzas y covarianzas

Newey y West (1987) han apuntado que las estimaciones de la matriz de covarianzas propuestas por Hansen y Singleton (1982) no suelen ser semidefinidas positivas en muestras pequeñas. La expresión (8) es la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MGM. La estimación óptima de W_0 está dada por

$$\hat{W}_T = (\bar{S}_T)^{-1}$$

siendo,

$$\bar{S}_T = \hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m} [\Omega_j + \Omega'_j]$$

el estimador más simple o sencillo de W_T, en la que la cota **m** es igual al número de autocorrelaciones distintas de cero que se conocen *a priori*; y donde

$$\hat{W}_j = \sum_{t=j+1}^{T} \frac{\hat{h}_t \hat{h}_{t-j}}{T}$$

En la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, el hecho de que la matriz S_T no sea semidefinida positiva, provoca que el estimador MGM no sea óptimo. Por ello, Newey y West (1987) proponen un estimador de S_T, utilizando las condiciones de White y Domowitz (1984) que aseguran la consistencia y normalidad asintótica de los estimadores mínimo cuadráticos no lineales, como por ejemplo, los máximo verosímiles, las variables instrumentales, etc.. La propuesta de Newey y West (1987) se basa en utilizar pesos decrecientes que garanticen que la matriz sea semidefinida positiva[4]. Así,

4. La función w(j,m) definida por Newey y West (1987) es un caso especial de

$$w(j,m) = \left[\frac{m+1-|j|}{m+1} \right]^{\rho}, j = -m, -m+1, ..., 0.1, ..., m-1, m.$$

donde, $\rho=1$. Este es el valor más pequeño que garantiza que la matriz se definida positiva. Cuando $\rho=0$, la matriz de covarianzas coincide con la especificada por Hansen (1982).

$$\hat{S}_T = \hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m} w(j,m)\,[\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}'_j]$$

donde, las autocorrelaciones muestrales son ponderadas a través de la función de pesos, tal como,

$$w(j,m) = 1 - \left[\frac{j}{m+1}\right]$$

la cual, introducida en la función kernel de densidad espectral estimada posibilitará que el estimador resultante de S_T sea una matriz semidefinida positiva. Esta función de pesos es decreciente cuando **j** se incrementa. Además, nótese que para valores fijados de **j**, el peso w(j,m) se aproxima a 1 cuando **m** crece. Por tanto, es razonable pensar que los estimadores de S_T, que están formados por las autocovarianzas muestrales, serían consistentes si a **m** se le permite crecer con el tamaño muestral.

Esta clase de ventana espectral corrige la matriz de covarianzas de los estimadores cuando puede existir correlación serial en la forma de una media móvil de orden **m**, y, además, proporcionan una estimación robusta de la matriz de covarianzas ante la existencia de heterocedasticidad y autocorrelación. En algunas situaciones, el valor de **m** se conoce a través de la teoría. Sin embargo, cuando $\mathbf{m} \neq 0$, existen problemas para su cálculo. Así, una elección errónea puede provocar la invalidez de los contrastes de hipótesis utilizados.

Otras elecciones de la función de pesos w(j,m) también pueden producir estimaciones de S_T que hagan que la matriz sea semidefinida positiva. Para ello, teniendo en cuenta que la secuencia {v(0,m),...,v(m,m)}, donde cada v(j,m) representa a un número arbitrario, entonces

$$w(j,m) = \frac{\left[\sum_{l=0}^{m-j} \upsilon(l,m)\ \upsilon(l+j,m)\right]}{\left[\sum_{l=0}^{m} \upsilon(l,m)^2\right]}$$

hace que las estimaciones de S_T sean semidefinidas positivas.

Según el teorema 2 de Hansen (1982), bajo ciertas condiciones de regularidad, si la elección de **m** se realiza a través de una función que dependa del tamaño muestral, tal que m(T), entonces,

$$\lim_{T\to\infty} m(T) = +\infty$$

y

$$\lim_{T\to\infty} \left[\frac{m(T)}{\sqrt[4]{T}} \right] = 0$$

entonces, la matriz S_T estimada converge en probabilidad a cero,

$$\left[\hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m(T)} w(j,m(T)) \, [\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}'_j] \right] - S_T \to 0$$

La obtención de estas funciones de pesos decrecientes suelen obtenerse a través de las funciones kernel de densidad espectral, utilizando los métodos de Parzen o Bartlett.

El número de autocovarianzas distintas de cero en u_{t+n} depende del número de periodos considerados en la ecuación, **n**. Hansen y Singleton (1982) argumentan que cuando **n>1**, y las preferencias son separables en el tiempo la función de autocovarianzas es una media móvil de orden (**n-1**), con lo cual, $E[u_t \, u_{t-j}] = 0$, $\forall$ **j≥n**.

5. Contraste de las restricciones sobreidentificadas

El contraste del modelo económico definido por las condiciones de ortogonalidad del modelo puede realizarse mediante las restricciones sobreidentificadas[5]. La existencia de más condiciones de ortogonalidad que parámetros implica que el modelo está sobreidentificado. De esta forma, las condiciones de ortogonalidad obtenidas sirven para construir un contraste de las restricciones de sobreidentificación implícitas en la ecuación (1).

5. Aunque, existen otros métodos de contraste alternativos como el test de Hansen y Jagannathan (1991) quienes para determinar si los datos de activos utilizados son inadecuados cuando se valora la

El procedimiento de estimación supone que existen **k** combinaciones lineales de las **r** condiciones de ortogonalidad, que están asociadas a las condiciones de primer orden en la minimización de $J_T(\theta)$. Cuando **r>k**, existen **r-k** condiciones de ortogonalidad independientes que se utilizan en la estimación.

Si la ecuación (1) está correctamente especificada, existen **r-k** condiciones que serán nulas. El lema (4.2) de Hansen (1982) determina que el estadístico de prueba que sirve para contrastar las restricciones de sobreidentificación implícitas en el modelo teórico se consigue calculando T veces el valor minimizado de $J_T(\theta)$ bajo la hipótesis nula, el cual se distribuye asintóticamente como una distribución de probabilidad χ^2, de tal forma que

$$T\, J_T(\theta_T) = T\, g_T(\theta_T)'\, W_T g_T(\theta_T) \rightarrow \chi^2_{r-k}$$

donde, θ_T es el estimador MGM; W_T es un estimador consistente de W_0; y **r-k** son los grados de libertad que representan el número de condiciones de ortogonalidad linealmente independientes.

Así, existe un único $\theta_0 \in \Theta$, tal que la perturbación u_{t+n} y el vector k dimensional de variables instrumentales, $z_t \in \Omega_t$ satisface

$$H_0: E\left[h(x_{t+n}, \theta_0) \otimes z_t\right] = 0$$

Si se cumple que $\chi^2 < \chi^2_{r-k}$, entonces no se rechaza la hipótesis nula y las restricciones de sobreidentificación que se asocian a modelo (1) no implican que existan evidencias en contra del modelo económico propuesto, y por tanto, éste se encuentra correctamente especificado.

---

tasa marginal de sustitución intertemporal (TMSI) implícita en (2). En este sentido, se realiza una aproximación paramétrica que se caracteriza por la dualidad entre la frontera definida por la media y desviación estándar de TMSI, y porque TMSI son variables aleatorias positivas. Este método de diagnóstico comprueba si la TMSI implícita en (2) satisface la relación media-varianza para cada TMSI que es admisible, tal que por ejemplo

$$TMSI = \hat{\beta} \left[\frac{c_{t+1}}{c_t} \right]^{\hat{\gamma}(1-\hat{k})-1} \left[\frac{g_{t+1}}{g_t} \right]^{(\hat{\gamma}-1)\hat{k}}$$

siendo c_t y g_t el consumo privado y público, respectivamente; y β, γ y k los parámetros estimados.

La forma de computar los grados de libertad **r-k** se realiza a través del conocimiento de: 1.- el número de ecuaciones en el modelo, que denominamos **N**; 2.- el número de intrumentos, **q**, que dependen de los retardos empleados, y que genéricamente denominamos **nlag**, representando la longitud del retardo de las variables instrumentales utilizadas, z_t; 3.- el número de parámetros, **k**, a estimar. De esta forma, los grados de libertad pueden obtenerse como **r-k = N (1+q nlag) - k**.

Hansen y Singleton (1982) argumentan que cuando **nlag** se incrementa se introducen más condiciones de ortogonalidad en en la estimación del modelo. De esta forma, la matriz de covarianzas asintótica se hace más pequeña, y aumenta el número de restricciones de sobreidentificación que se contrastan, haciendo que las propiedades muestrales de los estimadores se incumplan.

Referencias Bibliográficas

BREEDEN,D.T. (1979). An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities. *Journal of Financial Economics*, Vol.7, pp. 265-296.

BAKSHI,G. AND CHEN,Z. (1994). Baby Boom, Population Aging, and Capital Markets. *Journal of Business*, Vol.67, pp. 165-202.

CAMPBELL,J. (1993a). Understanding Risk and Return. *National Bureau of Economic Research*, Working Paper, nº.4554.

CAMPBELL,J. (1993b). Intertemporal Asset Pricing Without Consumption Data. *American Economic Review*, Vol.83, pp. 487-512.

DUNN,K.B. and SINGLETON,K.J. (1986). Modelling the Term Structure of Interest Rates under Non-Separable Utility and Durability of Goods. *Journal of Financial Economics*, Vol.17, pp. 27-55.

EPSTEIN,L.G. and ZIN,S.E. (1989). Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework. *Econometrica*, Vol.57, pp. 937-969.

HANSEN,L.P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments. *Econometrica*, Vol.50, pp. 1029-1054.

HANSEN,L.P. and SINGLETON,K.J. (1982). Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models. *Econometrica*, Vol.50, pp. 1269-1286.

HANSEN,L.P. and SINGLETON,K.J. (1983). Stochastic Consumption, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Asset Returns. *Journal of Political Economics*, Vol.17, pp. 149-265.

HANSEN,L.P. and JAGANNATHAN, R. (1991). Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies. *Journal of Political Economy*, Vol.99, pp. 225-262.

LUCAS,R.E.J. (1978). Asset Prices in a Exchange Economy. *Econometrica*, Vol.46, pp. 1436-1445.

NEWEY,W.K. and WEST,K.D. (1987). A Simple, Positive, Semi-Definite Heterokedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, Vol.55, pp. 703-708.

PÉREZ-RODRÍGUEZ,J. (1994). La Modelización Estocástica de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en España. Tesis Doctoral. Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española. Universidad de Barcelona.

RUBINSTEIN,M. (1977a). The Strong Case for Generalized Logarithmics Utility Model as the Premier Model of Financial Markets. En *Financial Decision Making Under Uncertainty*. Ed. Levy,H. and Sarnat,M., 1977, pp. 11-62.

SARGENT,T. (1987). Dynamic Macroeconomic Theory. Harvard University Press, Cambridge. Massachussetts.

SINGLETON,K.J. (1985). Testing Specifications of Economic Agents Intertemporal Optimun Problems in the Presence of Alternative Models. *Journal of Econometrics*, Vol.30, pp. 391-413.

WHITE,H. and DOMOWITZ,I. (1984). Nonlinear Regression with Dependent Observations. *Econometrica*, Vol.52, pp. 143-161.